数理解析研究所講究録
721巻 1990年 16-31

Non-holomorphic Poincaré 級数の Fourier 係数の別表示とその応用について

鹿児島高専　吉田英治（Eiji Yoshida）

Selberg は[13]で，Selberg 理論の一環であるスペクトル分解 formula というものの応用を述べ，その中で当面考えるべき問題の1つとして，Selberg の固有値予想と呼ばれるものを提出した．

Γ を合同群，q を $\begin{pmatrix}1&q\\&1\end{pmatrix}\in\Gamma$ となる最小の正整数，m, n を 0 でない整数とするとき，Kloosterman sum $S(m,n,c,\Gamma)$ が

(0.1)
$$S(m,n,c,\Gamma)=\sum_{\substack{0\le a<qc\\0\le d<qc}} e\left(\frac{1}{qc}(ma+nd)\right),\quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$$

で定義される．ただし，$e(x)=e^{2\pi i x}$．また，Kloosterman zeta 関数を

(0.2)
$$Z_{m,n}(s)=\sum_{c>0}\frac{S(m,n,c,\Gamma)}{c^{2s}}\qquad(\text{一般には } \mathrm{Re}\, s>1)$$

とするとき，[13]に示されている通り，Selberg の固有値予想は，$Z_{m,n}(s)$ が $\mathrm{Re}\, s>1/2$ まで正則に解析接続されるであろうという内容と同値になる．今回は，ここらあたりの内容を復習しながら，筆者が得た non-holomorphic Poincaré 級数の Fourier 係数の別表示の応用として，$Z_{m,n}(s)$ の別表示を導いてみたい．

$Z_{m,n}(s)$ を用いない Selberg の固有値予想へのアプローチとしては，Langlands などの automorphic representation を用いた方法があるが，現在ではむしろこの方向から考えるのが主流の様である．

§1. Selberg の固有値予想

$H=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ を上半平面とし，双曲空間の構造 $d\mu(z)=y^{-2}(dx^2+dy^2)$ が入っているとする．以下の議論は cusp ∞ を持つような第一種フックス群全てに適用出来るが，話を簡単にするために Γ は合同群であるとする．また，$\mathcal{D}_\Gamma=\Gamma\backslash H$ を Γ の基本領域とする．次に $L^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ を Hilbert 空間

$$L^2(\mathcal{D}_\Gamma)=\{f(z)\mid f(\gamma z)=f(z),\ \gamma\in\Gamma,\ \int_{\mathcal{D}_\Gamma}|f(z)|^2d\mu(z)<\infty\}$$

とし，Laplace 作用素を

$$D=y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

とおく．D を $L^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ に作用させたときのスペクトル分解は

$$(1.1)\qquad L^2(\mathcal{D}_\Gamma)=L_0^2(\mathcal{D}_\Gamma)\oplus\mathbb{C}\oplus L_c^2(\mathcal{D}_\Gamma)$$

となる．$L_0^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ は discrete spectrum に相当する所で，cusp form の空間になり，Maass wave form $\{f_j\}_{j\geq1}$ を直交基底としてもつ：

$$f_j(z)=y^{1/2}\sum_{n\neq0}c_j(n)K_{ir_j}\left(2\pi\frac{|n|}{q}y\right)e\left(\frac{n}{q}x\right).$$

ここで，$K_\nu(y)$ は例えば

$$K_\nu(y)=\frac{\pi^{1/2}(y/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_1^\infty e^{-yt}(t^2-1)^{\nu-(1/2)}dt,\quad \mathrm{Re}\,\nu>-1/2,\ y>0\ [10;P.187]$$

で定義される変形ベッセル関数．更に Maass wave form f_j は

Dの固有関数であり

(1.2) $$Df_j=\left(\frac{1}{4}+r_j^2\right)f_j$$

を満たす．また，$L_c^2(\mathcal{D}_\Gamma)$はcontinuous spectrumに相当する部分である．(1.1)のスペクトル分解は一般にはテータの空間と呼ばれる有限次元の部分空間をもつが，Γ：合同群，multiplierが恒等的に1つまり今の状況では現れない．

Dが正定値ということから，(1.2)の固有値$\frac{1}{4}+r_j^2$は常に≥ 0である．即ち，$r_j\in\mathbb{R}$か$r_j=ir_j'$，$-\frac{1}{2}\leq r_j\leq\frac{1}{2}$のいずれかである．もしも後者のタイプの固有値があるときは，それをexceptional eigenvalueと呼ぶ．このとき，Selbergの固有値予想というのは次の主張である．

Selbergの固有値予想：Γが合同群ならば，

$\left(\frac{1}{4}+r_j^2\right)\geq\frac{1}{4}$であろう$\Longleftrightarrow$ exceptional eigenvalueは存在しないであろう

上記予想は，$\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$の場合は，Maass，Roelkeによって([14])，更に$q\leq 17$なるHecke型のmodular群$\Gamma_0(q)$に対してはHuxley[4]によって肯定的に解かれている．Huxleyの証明法は，基本領域の形に注目した幾何学的なものである．一般の合同群については，Weil estimateと呼ばれるcurveのRiemann予想から出る評価：$S(m,n,c,\Gamma)=O(c^{1/2})$を使えば$\frac{1}{4}+r_j^2\geq\frac{3}{16}$がすぐに得られるが，Gelbart-Jacket[1]は，Weil estimateを用いず$GL(2)$から$GL(3)$

への lift を使って, $\geqq \frac{3}{16}$ を示した. また最近 Iwaniec[5] も Weil estimate を用いることなく解析数論の large sieve の方法で $\geqq \frac{3}{16}$ を得ている. 以上が大体現在までに知られている結果と思われる. Selberg の固有値予想と諸問題との関係は, [6, 9] に詳しいのでそちらを参照して下さい.

§2. Non-holomorphic Poincaré 級数

Selberg の固有値予想と Kloosterman zeta 関数 $Z_{m,n}(s)$ の解析的性質は, non-holomorphic Poincaré 級数を媒介として結びつく. 以下それを説明する.

g を $(0,1)$ で定義されたものとし, $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & gn \\ & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ とする. $m \neq 0$ を整数, $z \in H$, $s \in \mathbb{C}$ とするとき, non-holomorphic Poincaré 級数は次で定義される:

$$P_m(z,s,\Gamma) = \sum_{\gamma} e\left\{ \frac{1}{g}\left(m x(\gamma z) + i|m| y(\gamma z)\right) \right\} y(\gamma z)^s, \quad \gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$$

ここで, $x(\gamma z) = \mathrm{Re}(\gamma z)$, $y(\gamma z) = \mathrm{Im}(\gamma z)$.

この級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束し, その範囲で $P_m \in L^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ となる.

スペクトル分解 (1,1) を使うと,

$$(2.1) \quad \begin{cases} P_m(z,s,\Gamma) = \displaystyle\sum_{j \geq 1} \langle P_m, f_j \rangle f_j(z) + \underbrace{\langle P_m, 1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle L^2_c(\mathcal{D}_\Gamma) \text{への projection} \rangle}_{\mathrm{Re}\, s \geq 1/2 \text{ で正則}} \\[2em] \langle P_m, f_j \rangle = \displaystyle\int_{\mathcal{D}_\Gamma} P_m(z,s,\Gamma) \overline{f_j(z)}\, d\mu(z) \end{cases}$$

と書けるが, 更に Rankin convolution と同様の手順によって

$$\langle P_m, f_j \rangle = g\pi^{1/2}\left(4\pi\frac{|m|}{g}\right)^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma(s-(\frac{1}{2}+ir_j))\Gamma(s-(\frac{1}{2}-ir_j))}{\Gamma(s)}$$

となる．(2.1)によって P_m は $\mathrm{Re}\,s \geqq 1/2$ まで解析接続されるが，その際 $s=\frac{1}{2}+ir_j$ or $s=\frac{1}{2}-ir_j$ で1位の pole をもつことになる．もし ir_j が exceptional ならば，P_m は $(\frac{1}{2},1]$ という実軸上で pole をもつことになるから，「Selberg の固有値予想 $\Longleftrightarrow$ P_m が $\mathrm{Re}\,s>1/2$ まで正則に解析接続される」となる．

次に，$P_m(z,s,\Gamma)$ の Fourier 展開を

$$(2.2)\quad \begin{cases} P_m(z,s,\Gamma) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m(y,s,n,\Gamma)\,e\!\left(\frac{n}{g}x\right) \\ a_m(y,s,n,\Gamma) = \displaystyle\frac{1}{g}\int_0^g P_m(z,s,\Gamma)\,e\!\left(-\frac{n}{g}x\right)dx \end{cases}$$

とすると，Fourier 係数 a_m のよく知られた形は

$$(2.3)\quad \begin{aligned} a_m(y,s,n,\Gamma) &= \delta_{m,n}\,y^s e^{-2\pi|m|y/g} \\ &+ \frac{1}{g}\sum_{c>0} S(m,n,c,\Gamma)\,c^{-2s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{1-s}}{(1+x^2)^s}\,e\!\left(\frac{|m|}{gc^2}\frac{\varepsilon x+i}{y(x^2+1)}+\frac{n}{g}xy\right)dx \end{aligned}$$

である．$\delta_{m,n}$ は Kronecker 記号，ε は $m>0$ のとき 1，$m<0$ のとき -1．上式の第2項は，更に次の様に分解出来る．

$$(2.4)\quad \begin{aligned} &\frac{2}{\Gamma(s)}\frac{\pi^s}{g}\left(\frac{|m|}{g}\right)^{s-\frac{1}{2}} Z_{m,n}(s)\,y^{1/2}K_{s-\frac{1}{2}}\!\left(2\pi\frac{|m|}{g}y\right) \\ &+ \frac{1}{g}\sum_{c>0} S(m,n,c,\Gamma)\,c^{-2s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{1-s}}{(1+x^2)^s}\left\{e\!\left(\frac{|m|}{gc^2}\frac{\varepsilon x+i}{y(x^2+1)}\right)-1\right\}e\!\left(\frac{n}{g}xy\right)dx. \end{aligned}$$

このとき(2.4)の第2項は $\mathrm{Re}\,s>0$ で正則なことがわかる．(2.1)の解析接続により(2.3)も解析接続されるが，これからわかるように，「Selberg の固有値予想 $\Longleftrightarrow$ $Z_{m,m}(s)$ が $\mathrm{Re}\,s>1/2$ まで正則に解析接続される」である．

以上の内容は大むね全て Selberg[13] に記述されていることであるが，$Z_{m,n}(s)$ の解析的性質から Selberg の固有値予想にアプローチする為には，スペクトル分解 (2.1) に依らない $Z_{m,n}(s)$ の新しい解析接続が必要なことは容易に想像がつくと思われる。今回はその可能性らしきものを探ってみたい。

最近筆者は，Niebur[11] の結果と特殊関数のいくつかの性質を用いることにより，(2.2) の a_m の別表示を得ることが出来た。結果は次の通り。

Proposition 1[15]. $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，$n \neq 0$ ならば

$$a_m(y,s,n,\Gamma) = \delta_{m,n}\, y^s e^{-2\pi|m|y/q}$$
$$+ \frac{2}{\Gamma(s)}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s+1}|m|^{(1-s)/2}|n|^{(3s-1)/2}y^s\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)c^{-(1+s)}A_m(y,s,n,c)$$

$n=0$ ならば

$$a_m(y,s,0,\Gamma) = 2^{3-2s}\frac{\pi}{q\Gamma(s)}\left(\frac{\pi|m|}{q}\right)^{(1-s)/2}y^s\sum_{c>0}S(m,0,c,\Gamma)c^{-(1+s)}A_m(y,s,0,c)$$

ここで，$A_m(y,s,n,c)$ は次に等しい：

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{2s-1}(1+t^2)^{(s-1)/2}J_{s-1}(\alpha(1+t^2)^{1/2})\,dt, & mn>0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{s}(1+t^2)^{s-1}J_{s-1}(\alpha t)\,dt, & mn<0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-yt^2}t^{3s-2}J_{s-1}\left(\left(4\pi\frac{|m|}{q}\right)^{1/2}\frac{t}{c}\right)dt, & n=0 \end{cases}$$

ただし, $\alpha = 4\pi|mn|^{1/2}/(gc)$, $\beta = 2\pi|m|/g$.

この結果は Petersson [12] によって得られた holomorphic weight k の Poincaré 級数の Fourier 係数に関する formula の non-holomorphic の場合の類似物と思われる([13; P.8] も参照). $J_\nu(y)$ は通常の Bessel 関数で [10: P.179] にあるように次で与えられる.

$$J_\nu(y) = \pi^{-1/2}\frac{(y/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} e^{iyv}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dv, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2,\ y>0. \tag{2.5}$$

(2.2) と Proposition 1 を比較すると, 従来のものより複雑な形になったと見えるかも知れないが, Proposition 1 から Fourier 係数 a_m は Bessel 関数の性質に深く依存していることがわかる.

(2.5) を使うと, 例えば $mn>0$ のとき, (2.4) と同様, $\delta_{m,n}y^s e^{-2\pi|m|y/g}$ 以外の部分は次の2つの項に分解される:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\Gamma(s)}\frac{\pi^s}{g}\left(\frac{|m|}{g}\right)^{s-(1/2)} Z_{m,n}(s)\,K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{|m|}{g}y\right)\\ &+\frac{2}{\Gamma(s)}\left(\frac{2\pi}{g}\right)^{s+1}|m|^{(1-s)/2}|n|^{(3s-1)/2}\,\pi^{-1/2}\frac{\left(4\pi\frac{|mn|^{1/2}}{g}\right)^{s-1}}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}y^s\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)c^{-2s}\\ &\times\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{2s-1}(1+t^2)^{s-1}\int_{-1}^{1}\left(e^{i\alpha(1+t^2)^{1/2}v}-1\right)(1-t^2)^{s-\frac{3}{2}}dv\,dt\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6) の第1項を主要項, 第2項を残余項と呼ぶことにすると, 残余項は $\mathrm{Re}\,s > 1/2$ で正則になっており, 主要項は当然のことであるが(ある意味では残念なことであるが), (2.4) のそれと全く同じになっている.

§3. Proposition 1 の応用（$Z_{m,n}(s)$ の別表示）

(2.6) の残余項は $P_m(z,s,\Gamma)$ が保型性を持つためにどうしても必要な部分と見れるのであるが，一方で，Eisenstein 級数の場合は保型性を有しかつ，(2.6) の主要項に相当する部分しか現れてこない．Eisenstein 級数が Ramanujan sum あるいは Gauss sum に関与していることを考え合わせれば，(2.6) での残余項の存在は，Kloosterman sum の持つ何らかの性質と関係があるのではないかと想像される．以下では，残余項を主要項にまで昇格させることが出来ることも示したい．この事実が結果的に $Z_{m,n}(s)$ の別表示を与えてくれる．

ξ を $\mathrm{Re}\,\xi \geqq 0$ となる複素数，$s \in \mathbb{C}$，$z \in H$ に対し，ある保型関数 $P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma)$ を次で定義する：

<u>定義</u>:

$$(3.1) \qquad P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma) = \sum_{\gamma} e\left\{\frac{1}{g}\left(mx(\gamma z) + i|m|y(\gamma z)\right)\right\}\left(\frac{y(\gamma z)}{1+\xi y(\gamma z)}\right)^{s}, \quad \gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$$

ただし ξ の argment としては主値をとるものとする．

この級数は，P_m の収束性の証明([cf. 8])，あるいは[7: Th2.1.1]と同様の議論によって，$\mathrm{Re}\,s > 1$ なる s に対し広義一様に絶対収束する．また，その範囲で，ξ 及び s の正則関数であること，更に z についての real analytic な関数であることもわかる．従って，$P_m^{(\xi)}$ は作り方から存在すれば必ず Γ の保型関数になるから，Fourier 展開が可能である．今，それを

$$\begin{cases} P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m^{(\xi)}(y,s,n,\Gamma)\, e(\frac{n}{q}x) \ , \ (z = x+iy) \\ a_m^{(\xi)}(y,s,n,\Gamma) = \frac{1}{q}\int_0^q P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma)\, e(-\frac{n}{q}x)\,dx \end{cases}$$

と書くことにしよう. $P_m^{(\xi)}$ は $\mathrm{Re}\, s>1$ で, x,ξ に対しては全く一様に絶対収束するから, 上記 Fourier 係数 $a_m^{(\xi)}$ は $\mathrm{Re}\,\xi \geq 0$ なる領域で定義された ξ の正則関数である.

一方, ξ を $|\xi| < A\cdot\max\{y(\gamma z) \mid \gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma\}$ (A は各 s について定まるある定数) なる範囲に制限すると, (3.1) に施て, $(1+\xi y(\gamma z))^{-s}$ を 2 項展開出来

$$P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma) = \sum_\gamma e(\tfrac{1}{q}(m x(\gamma z) + i|m| y(\gamma z)))\, y(\gamma z)^s \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}(s)_\ell \{\xi y(\gamma z)\}^\ell$$

と書ける. $|\xi| < AB$ ($B = \max\{y(\gamma z) \mid \gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma\}$) のとき, この 2 重級数が絶対収束することも容易にわかるから, $|\xi|<AB$ である限り, $\sum_\ell$ と $\sum_\gamma$ の交換が可能になり, 加えて, $\int_0^q dx$ と $\sum_\ell$ の交換も可能になる. よって次を得る:

$$(3.2) \quad \begin{cases} P_m^{(\xi)}(z,s,\Gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{(s)_\ell}{\ell!}\xi^\ell\, P_m(z,s+\ell,\Gamma) \\ a_m^{(\xi)}(y,s,n,\Gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell \frac{(s)_\ell}{\ell!}\, \xi^\ell a_m(y,s+\ell,n,\Gamma) \end{cases}$$

ただし, $\mathrm{Re}\,\xi \geq 0$ かつ $|\xi| < AB$.

以下, $a_m^{(\xi)}(y,s,n,\Gamma)$ を explicit に求めることを目標にする. Proposition 1 と (3.2) から, 例えば $mn>0$ のときは

$$(3.3) \quad \begin{aligned} a_m^{(\xi)}(y,s,n,\Gamma) &= \delta_{m,n}\Big(\sum_\ell (-1)^\ell \frac{(s)_\ell}{\ell!}\xi^\ell y^\ell\Big) e^{-2\pi\frac{|m|}{q}y} \\ &+ 2\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)^{s+1}|m|^{\frac{1-s}{2}}|n|^{\frac{3s-1}{2}} y^s \sum_{c>0} S(m,n,c,\Gamma)\, c^{-(1+s)} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{\Gamma(s+\ell)} \frac{(s)_{\ell}}{\ell !} \xi^{\ell} \left(\frac{2\pi}{g}\right)^{\ell} |m|^{-\frac{\ell}{2}} |n|^{\frac{3}{2}\ell} y^{\ell} c^{-\ell}$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\beta y(1+2t^2)} t^{2(s+\ell)-1} (1+t^2)^{\frac{s+\ell-1}{2}} J_{s+\ell-1}(\alpha\sqrt{1+t^2})\, dt$$

となる．第１項は２項展開そのものだから問題はない．第２項については，少し工夫を要するが大体 $|\xi| < AB$ の範囲で絶対収束することが示せるから，$\sum_{\ell}$ と $\sum_{c}$ の交換，及び $\int_0^{\infty} dt$ と $\sum_{\ell}$ の交換が保障される．

次に，[10: P.181] を使えば，

$$J_{s-1+\ell}(\alpha\sqrt{1+t^2}) = \frac{(-i)^{\ell}\ell!\,\Gamma(2s-2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(2s-2+\ell)} \left(\frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{2}\right)^{s-1} \int_{-1}^{1} e^{i\alpha\sqrt{1+t^2}u} (1-u^2)^{s-\frac{3}{2}} C_{\ell}^{s-1}(u)\, du$$

と書ける．ここで，$C_{\ell}^{\nu}(u)$ は [10: P.86] で定義される Gegenbauer の多項式．簡単な評価から，$\int_{-1}^{1} du$ と $\sum_{\ell}$ の交換が可能なことも導ける．従って，(3.3) の第２項は次の様に表わせる．

$$2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(2s-2)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \left(\frac{2\pi}{g}\right)^{2s} |n|^{2s-1} y^{s} \sum_{c>0} S(m,n,c,\Gamma) c^{-2s} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)}$$

(3.4)

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\beta y(1+2t^2)} t^{2s-1} (1+t^2)^{s-1} \int_{-1}^{1} e^{i\alpha\sqrt{1+t^2}u} (1-u^2)^{s-\frac{3}{2}} \frac{C_{\ell}^{s-1}(u)}{\Gamma(2s-2+\ell)} a_0^{\ell}\, du\, dt$$

ただし，$a_0 = i\left(\frac{2\pi}{g}\right)|m|^{-\frac{1}{2}}|n|^{\frac{3}{2}} y c^{-1} t^2 (1+t^2)^{-1/2} \xi$，$\alpha = 4\pi \frac{|mn|^{1/2}}{gc}$，$\beta = 2\pi \frac{|n|}{g}$．

以下，積分 $\int_{-1}^{1}(\quad)du$ の部分の計算法を述べる．まず，$u = \cos\theta$ と変換し，[10: P.149] の公式を使えば，

$$\sum_{\ell} \frac{C_{\ell}^{s-1}(\cos\theta)}{\Gamma(2s-2+\ell)} a_0^{\ell} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(s-1)} (2\sin\theta)^{\frac{3}{2}-s} a_0^{\frac{3}{2}-s} J_{s-\frac{3}{2}}(a_0 \sin\theta)\, e^{a_0\cos\theta}$$

となるから，

$\alpha\sqrt{1+t^2}=\alpha_0$ とおいて,

$$\int_{-1}^{1} e^{i\alpha_0 u}(1-u^2)^{s-\frac{3}{2}}\sum_{\ell}\frac{C_\ell^{s-1}(u)}{\Gamma(2s-2+\ell)}a_0^\ell du$$

$$=\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(s-1)}2^{\frac{3}{2}-s}\int_0^{\pi} e^{i(\alpha_0-ia_0)\cos\theta}\sin^{s-\frac{1}{2}}\theta\, a_0^{\frac{3}{2}-s}J_{s-\frac{3}{2}}(a_0\sin\theta)\,d\theta$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ と $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ に分解して,

$$=\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(s-1)}2^{\frac{5}{2}-s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\{(\alpha_0-ia_0)\cos\theta\}\sin^{s-\frac{1}{2}}\theta\, a_0^{\frac{3}{2}-s}J_{s-\frac{3}{2}}(a_0\sin\theta)\,d\theta .$$

ここで, [10:P.205] の公式を使えば, 最終的に

$$\int_{-1}^{1} e^{i\alpha_0 u}(1-u^2)^{s-\frac{3}{2}}\sum_{\ell}\frac{C_\ell^{s-1}(u)}{\Gamma(2s-2+\ell)}a_0^\ell du$$

(3.5)

$$=\frac{2^{2-s}\pi}{\Gamma(s-1)}\{a_0^2+(\alpha_0-ia_0)^2\}^{-\frac{s-1}{2}}J_{s-1}\left(\sqrt{a_0^2+(\alpha_0-ia_0)^2}\right)$$

となる. また,

$$a_0^2+(\alpha_0-ia_0)^2=\left(\frac{4\pi}{8c}\right)^2(1+t^2)(|m|^2\xi t^2 y+|m||m|) .$$

(3.5) を (3.4) に代入することにより, (3.3) の第 2 項が, 満足出来る形にまとめられたことになる. また, (3.5) の Bessel 関数の部分を, (2.5) の積分表示で表わしながら (3.4) 全体を評価してみると, $|m|, |m|$ にのみ依存した十分小さな正数 M に対し, $|\mathrm{Im}\,\xi|<M$ なる帯領域で絶対収束することがわかる. ただし $\mathrm{Re}\,s>1$. よって, (3.4) は (3.5) を用いて表わすことにより, $|\xi|<A\cdot B$, $\mathrm{Re}\,\xi\geq 0$ という領域から, 上記の帯領域へ解析接続される. $a_m^{(3)}$ 自体は全ての ξ ($\mathrm{Re}\,\xi\geq 0$) に対して

正則だったから，ξ を 0 以上の実数と制限しておけば，一致の定理によって，任意に fix された m, n に対し，$a_m^{(3)}$ を (3.5) を (3.4) に代入した形で表記出来ることになる．

以上をまとめれば，次が得られたことになる．

Proposition 2．N を 0 以上の任意の実数とする．$mn>0$ ならば，$\mathrm{Re}\,s>1$ で（Γ が合同群ならば $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{4}$），

$$a_m^{(N)}(y,s,n,\Gamma)=\delta_{m,n}\left(\frac{y}{1+Ny}\right)^s e^{-2\pi\frac{|m|}{g}y}$$

$$+\frac{2^{3-s}\pi^{1/2}}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(s-1)}\left(\frac{2\pi}{g}\right)^{2s}|m|^{2s-1}y^s\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)c^{-2s}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{2s-1}(1+t^2)^{s-1}A_0^{-\frac{s-1}{2}}J_{s-1}(\sqrt{A_0})\,dt$$

ここで，$A_0=\left(\frac{4\pi}{gc}\right)^2(1+t^2)(|m|^2Nt^2y+|m||n|)$．

$mn<0$，$n=0$ のときも全く同様の計算が可能．また，

$$\frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(s-1)}=\pi^{-1/2}2^{2s-3}$$

である．

Proposition 2 に於て，特に $N=0$ としたときは，定義 (3.1) から明らかに $P_m^{(0)}(z,s,\Gamma)=P_m(z,s,\Gamma)$．よって当然 $a_m^{(0)}(y,s,n,\Gamma)=a_m(y,s,n,\Gamma)$ となるから，実質的に *Proposition* 1 と同じになる．従ってこの意味で *Proposition* 2 は *Proposition* 1 の拡張になっている．

$a_m^{(N)}$ についても a_m に対する主要項と残余項の分解 (2.6) と

同様のことが出来，次の様になる：

$$\frac{2}{\Gamma(s)}\frac{\pi^s}{q}\left(\frac{|m|}{q}\right)^{s-\frac{1}{2}}Z_{m,n}(s)K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{|m|}{q}y\right)$$

(3.6) $$+\frac{4\pi^{3/2}}{q}\frac{1}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}\left(\frac{2\pi|m|}{q}\right)^{2s-1}y^s\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)c^{-2s}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{2s-1}(1+t^2)^{s-1}\int_{-1}^{1}(e^{i\sqrt{A_0}u}-1)(1-u^2)^{s-\frac{3}{2}}\,du\,dt$$

(3.6) からわかるように，$a_m^{(N)}$ の主要項は，a_m の主要項と全く同じになっている．つまり，P_m から $P_m^{(N)}$ を構成してゆく過程は，残余項の部分を変形してゆくシステムと見ることが出来る．一方，$P_m^{(\xi)}$ の定義式 (3.1) からわかることは，$\xi=N$ としたとき，$\lim_{N\to\infty}P_m^{(N)}(z,s,\Gamma)\equiv 0$ が $\mathrm{Re}\,s>1$ で成立するということである．よって当然 Fourier 係数についても $\lim_{N\to\infty}a_m^{(N)}(y,s,n,\Gamma)\equiv 0$ が $\mathrm{Re}\,s>1$ で成り立つ．即ち，$mn>0$ の場合，上記 (3.6) が $\mathrm{Re}\,s>1$ で $N\longrightarrow\infty$ のとき恒等的に 0 になる訳である．つまり次の結果を得る．

Theorem ($Z_{m,n}(s)$ の別表示)．$mn>0$ のとき，$\mathrm{Re}\,s>1$ (Γ が合同群ならば $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{4}$) なる範囲で

$$\frac{2}{\Gamma(s)}\frac{\pi^s}{q}\left(\frac{|m|}{q}\right)^{s-\frac{1}{2}}Z_{m,n}(s)K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{|m|}{q}y\right)$$

$$=-\frac{4\pi^{3/2}}{q}\frac{1}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}\left(\frac{2\pi|m|}{q}\right)^{2s-1}y^s\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)c^{-2s}$$

$$\times\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty e^{-\beta y(1+2t^2)}t^{2s-1}(1+t^2)^{s-1}\int_{-1}^{1}(e^{i\sqrt{A_0}u}-1)(1-u^2)^{s-\frac{3}{2}}\,du\,dt$$

ただし，$A_0=(\frac{4\pi}{8c})^2(1+t^2)(|m|^2Nt^2y+|m||n|)$．

次に考えることは当然 Theorem の右辺が $\mathrm{Re}\,s>\frac{1}{2}$ という範囲まで伸びるかどうかという問題であるが，$N\to\infty$ の状況での評価が必要だから単純には行かないであろうと思われる．しかし，考えてみる価値は十分にありそうである．また，$a_m^{(N)}$ を主要項と残余項とに分けて $N\to\infty$ とするのではなく，Kuznetsov と同様，内積 $\langle P_m^{(N)}, P_n\rangle$ をまず２通りの方法で計算した後で $N\longrightarrow\infty$ とするという立場を考える事も出来そうである．少なくとも今の所，筆者にはこちらの方がより興味深いように感じられる．

参考文献

[1] Gelbart, S.S and Jacket, H, A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3), Ann. Ecole Norm. Sup. 11 (1978), 471-542.

[2] Goldfeld, D and Sarnak, P, Sums of Kloosterman sums, Invent. Math., 71 (1983), 243-250.

[3] Heijhal, D.A, The Selberg trace formula for PSL(2, $\mathbb{R}$), Lecture Notes in Math., no. 1001, Springer, Berlin-New York 1983.

[4] Huxley, M.N, Introduction to Kloostermania, Banach Center Publ., 17, PWN-Polish Scientific Publ., (1985) 217-306.

[5] Iwaniec, H, Selberg's ower Bound of the first eigenvalue for congruence groups, in "Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups", Symp. in Honor of A. Selberg, Academic Press 1989, 371-375.

[6] Iwaniec, H, Non-holomorphic modular forms and their applications, in Modular forms (Ed. Rankin), Ellis Horwood Ltd 1984, 157-196

[7] Kubota, T, Elementary theory of Eisenstein series, Kodansha and John Willey, Tokyo-New York 1973.

[8] Kuznetsov, N.V, Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture : sums of Kloosterman sums, Math. Sb., 39 (1981), 299-342.

[9] 松本耕二, Kloosterman和の評価とその応用, 第33回代数学シンポジウム報告集 1987, 13-45.

[10] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信, 数学公式III '特殊関数' 岩波書店

[11] Niebur, D, A class of nonanalytic automorphic functions, Nagoya Math. J. 52 (1973), 133-145.

[12] Petersson, H, Über die Entwicklungskoeffizienten der Automorphen Formen, Acta Math. 58 (1932), 169-215.

[13] Selberg, A, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. Symp. Pure Math., 8, AMS 1965, 1-15.

[14] 高田一郎, 平松豊一, Non-holomorphic modular forms について, 数理研考究録

[15] Yoshida, E On Fourier coefficients of non-holomorphic Poincaré series, to appear.